

2020年天津南开区高三一模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

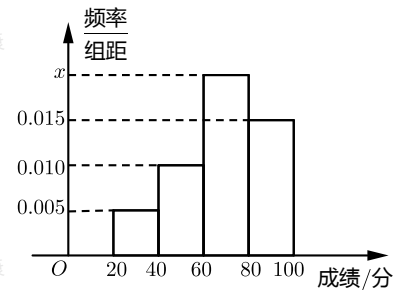
1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{3, 6\}$, 则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于 ().

A. $\emptyset$ B. $\{1, 3, 5, 6\}$ C. $\{2, 4, 7\}$ D. $\{2, 4, 6\}$

2. 已知命题 $p: x^2 + 2x - 3 > 0$, 命题 $q: x > a$, 且 q 的一个必要不充分条件是 p , 则实数 a 的取值范围是 ().

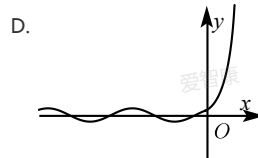
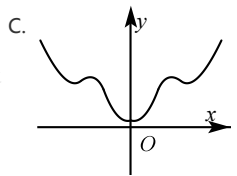
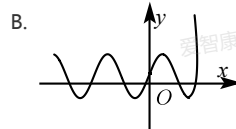
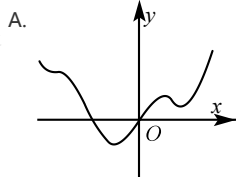
A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3]$

3. 为了调查学生的复习情况, 高三某班的全体学生参加了一次在线测试, 成绩的频率分布直方图如图所示, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100)$. 若成绩在 $[60, 80)$ 的人数是 16, 则低于 60 分的人数是 ().



A. 6 B. 12 C. 15 D. 18

4. 函数 $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{3 + \cos x}$ 的部分图象可能是 ().



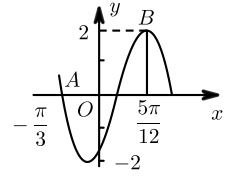
5. 若圆 C 的圆心在第一象限, 圆心到原点的距离为 $\sqrt{5}$, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切, 则该圆的标准方程是 ().

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$, 设 $a = f(0.31^2)$, $b = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$, $c = f(2 \ln 2)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

7. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式为 () .



- A. $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$ B. $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 C. $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $f(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right)$

8. 已知点 A 是抛物线 $y^2 = 4x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一个交点. 若抛物线的焦点为 F , 且 $|AF| = 4$, 则点 A 到双曲线两条渐近线的距离之和为 () .

- A. $2\sqrt{6}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ x^3 - (a+1)x^2 + 2ax, & x > 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = ax$ 有 4 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 1]$ D. $(1, +\infty)$

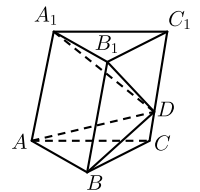
二、填空题

(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

10. 若 $\frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$ (i 是虚数单位, a 是实数), 则 $a =$ _____ .

11. 二项式 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为 _____ .

12. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 是 CC_1 上一点, 设四棱锥 $D - A_1ABB_1$ 的体积为 V_1 , 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1 : V_2 =$ _____ .



13. 甲、乙两名枪手进行射击比赛, 每人各射击三次, 甲三次射击命中率均为 $\frac{4}{5}$; 乙第一次射击的命中率为 $\frac{7}{8}$, 若第一次未射中, 则乙进行第二次射击, 射击的命中率为 $\frac{3}{4}$, 如果又未中, 则乙进行第三次射击, 射击的命中率为 $\frac{1}{2}$, 乙若射中, 则不再继续射击. 则甲三次射击命中次数 ξ 的期望为 _____; 乙射中的概率为 _____ .

14. 已知存在正数 a, b 使不等式 $\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b} > \log_2(1-x)$ 成立, 则 x 的取值范围是 _____ .

15. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2CD = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, 若 $\vec{BE} = \vec{EF} = \vec{FG} = \vec{GC}$, 则 $2\vec{AE} \cdot \vec{DC} + \vec{AE} \cdot \vec{AF} =$ _____; 若 P 为边 BC 上一动点, 当 $\vec{PA} \cdot \vec{PC}$ 取最小值时, 则 $\cos \angle PDC$ 的值为 _____ .

三、解答题

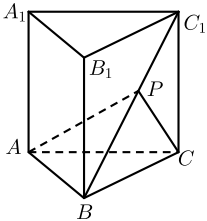
(本大题共5小题，共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为三个内角 A, B, C 的对边，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $a - b = 1$ ， $\sqrt{3}a \cos C - c \sin A = 0$.

(1) 求 c 及 $\cos A$.

(2) 求 $\cos (2A - C)$ 的值 .

17. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB = AC = AA_1$, $AB \perp AC$, P 为线段 BC_1 上一点.



- (1) 若 $BP = PC_1$, 求 PC 与 AA_1 所成角的余弦值.
- (2) 若 $BP = \sqrt{2}PC_1$, 求 PC 与平面 ABB_1A_1 所成角的大小.
- (3) 若二面角 $A_1 - AC - P$ 的大小为 45° , 求 $\frac{BP}{PC_1}$ 的值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = b_2 = 2$, $b_{n+1}b_n = 2^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 已知点 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，过点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点，当直线 l 过 C 的下顶点时， l 的斜率为 $\sqrt{3}$. 当直线 l 垂直于 C 的长轴时， $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3}{2}$,
- (1) 求椭圆 C 的标准方程 .
- (2) 当 $|MF| = 2|FN|$ 时，求直线 l 的方程 .
- (3) 若直线 l 上存在点 P 满足 $|PM|, |PF|, |PN|$ 成等比数列，且点 P 在椭圆外，证明：点 P 在定直线上 .

20. 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x^a$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $x - y - e = 0$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数, 求 a 的值.
- (2) 若函数 $f(x)$ 是 $(1, +\infty)$ 内的减函数, 求正数 a 的取值范围.
- (3) 若方程 $f(x) = 0$ 无实数根, 求实数 a 的取值范围.